



Piotr Furmanek*

Fasady fraktalne

Fractal facades

Wprowadzenie

Fraktale¹ to obiekty geometryczne, które można zdefiniować trzema właściwościami:

- metoda generowania jest określona zależnością rekurencyjną,
- wymiar jest najczęściej liczbą ułamkową,
- cechą charakterystyczną jest samopodobieństwo.

Pierwsza cecha określa zależność kolejnego wyrazu ciągu od wyrazu poprzedniego. Druga, dotycząca pojęcia wymiaru, ma szczególne znaczenie, ponieważ w odróżnieniu od innych obiektów wymiar Hausdorffa w przypadku fraktali jest liczbą ułamkową. Ostatnia, trzecia cecha samopodobieństwa w uproszczeniu oznacza, że każda część fraktala jest pomniejszoną kopią całości [1, s. 62].

Ze względu na sposób generowania obiekty fraktalne można podzielić na cztery typy:

- fraktale klasyczne generowane za pomocą procedury opisowej,
- fraktale generowane za pomocą systemu funkcji iterowanych (*Iterated Function System* – IFS),
- fraktale generowane za pomocą systemu Lindenmayera (L-systemu),
- powierzchnie fraktalne.

Fractal facades

Fractals¹ are geometrical objects which can be defined by three properties:

- method of generation is determined by the recurrent relationship,
- dimension is most often a fractional number,
- self-similarity is their characteristic feature.

The first feature determines the relationship between the succeeding element of a sequence and the preceding element. The second, regarding the notion of dimension, has special significance as, unlike other objects, the Hausdorff dimension in the case of fractals is a fractional number. The last, third feature of self-similarity in simple terms means that each part of a fractal is a downscaled copy of the whole [1, p. 62].

Depending on their generation method, fractal objects can be divided into four types:

- classic fractals generated with the use of descriptive procedure,
- fractals generated with the use of IFS method (*Iterated Function System*),
- fractals generated with the use of Lindenmayer system (L-system),
- fractal surfaces.

* Wydział Architektury Politechniki Wrocławskiej/Faculty of Architecture, Wrocław University of Technology.

¹ Pojęcie „fraktal” wprowadzone przez Benoit Mandelbrota pochodzi od łacińskiego *fractus* – złamany, częściowy.

¹ The term “fractal” coined by Benoit Mandelbrot derives from Latin *fractus* – fractured, partial.

Fasady fraktalne w budowlach historycznych

Od momentu stworzenia przez Benoit Mandelbrota podstaw teorii fraktali badania w tym kierunku odbywały się w wielu dziedzinach jednocześnie. Odkrycia dotyczące fraktalnej geometrii natury opublikowane przez Mandelbrota w pracy *The Fractal Geometry of Nature* (*Fraktalna geometria natury*) [2] zainspirowały naukowców wielu dziedzin do głębszej analizy przedmiotu ich badań. Fala zainteresowań nie ominęła dziedzin zajmujących się teorią architektury. Wśród wielu tematów dotyczących związków geometrii fraktalnej z architekturą istotne miejsce zajmują prace dotyczące fasad o charakterze fraktalnym.

Carl Bovill, profesor Uniwersytetu w Maryland, w pracy zatytułowanej *The Doric Temple as a Fractal* (*Porządek dorycki jako fraktal*) [3] dokonuje analizy świątyni greckiej o porządku doryckim. Według niego w układzie fasady można zauważyć elementy związane cechą samopodobieństwa, najbardziej charakterystyczną cechą obiektów fraktalnych. Swoją tezę próbuje udowodnić, wykorzystując jedną z najbardziej rozpowszechnionych metod generowania fraktali – system funkcji iterowanych, zwany w skrócie IFS. Podstawą tej metody jest przekształcanie obiektów geometrycznych za pomocą transformacji afinicznych, a następnie wielokrotne powtarzanie tej samej operacji na kolejno uzyskiwanych zbiorach.

Według Bovilla poddanie układu kolumn z architrawem operacji skalowania o odpowiednio dobranych parametrach prowadzi do uzyskania rysunku żłobkowanej kolumny wraz z wieńczącą głowicą. Dowodem może być zgodność liczby kaneli z liczbą kolumn podpierających architraw w klasycznej świątyni doryckiej. Jeżeli liczba kaneli wynosiła 16–20, to na widocznej ortogonalnie części kolumny występowało 8–10 krawędzi oddzielających kanele. W przypadku ośmiu krawędzi liczba ta jest zgodna z liczbą ośmiu kolumn frontonu Partenonu – kanonicznej świątyni doryckiej.

W dalszej analizie Carl Bovill odkrywa cechę samopodobieństwa pomiędzy układem frontonu a kompozycją tryglifu. Dowodem jest przekształcanie skalowania za specjalnie dobranymi parametrami odręcznych rysunków frontonu świątyni (il. 1). Zgodnie z rekurencyjnie stosowaną metodą IFS następne przekształcenia skalowania tryglifów prowadzą do uzyskania elementów zwanych *mutulae*² i *guttae*³. Według Bovilla samopodobieństwo ornamentów frontonu ma czterostopniową głębię⁴, co może być dowodem na fraktalny charakter fasady świątyni doryckiej.

Wątpliwości może budzić odręczny charakter rysunków fasad badanych budowli oraz wybiórcza akceptacja wyników przekształceń IFS, w których wyniku w uzyskanym obrazie kolumny będącej zredukowanym obrazem

Fractal facades in historical buildings

Since the moment when the basis of the theory of fractals was developed by Benoit Mandelbrot research in this area has been conducted in numerous fields at the same time. Discoveries regarding fractal geometry of the nature published by Mandelbrot in *The Fractal Geometry of Nature* [2] inspired scientists in many fields to analyze the object of their research deeper. A wave of interest was also evident in the areas regarding the theory of architecture. Many topics regarding the relationships between the geometry of fractals and architecture included works regarding fractal facades.

Carl Bovill, professor at the University of Maryland, in his work *The Doric Temple as a Fractal* [3] analyzes the Greek temple built in the Doric order. In his opinion its facade, demonstrates some elements connected with self-similarity, the most characteristic feature of fractal objects. He tries to prove his claim with the use of one of the most popular fractal generation methods – IFS. The basic concept in this method is to transform geometrical objects with the use of affine transformations and then repeat the same operation multiple times with the next sets.

According to Bovill subjecting a system of columns with the architrave to scaling with adequately selected parameters results in a drawing of a fluted column crowned with a capital. Proof can be provided by the consistency of the number of flutes with the number of columns supporting the architrave in the classic Doric temple. If the number of flutes was 16–20, then the ortogonally visible part of the column had 8–10 edges separating the flutes. In the case of eight edges, this number is consistent with the number of eight columns of the front of the Parthenon – the canonic Doric temple.

Further in his analysis, Carl Bovill discovers the feature of self-similarity between the front and the composition of the triglyph. Proof comes from the transformation of scaling with specially selected parameters of hand-made drawing of the front of the temple (Fig. 1). According to the recurrently applied IFS method the successive transformations of scaling triglyphs result in the elements called *mutulae*² and *guttae*³. According to Bovill self-similarity of ornaments of the front has four levels of depth⁴ which can prove the fractal nature of the facade of this Doric temple.

Some doubt may arise from the sketchy nature of the drawings of the facades of the buildings being studied as well as a selective acceptance of the results of IFS transformations which resulted in an image of a column, being a reduced image of the facade, with a scaled triangle as a narrowed image of the tympanum in the place of its capital.

Nicoletta Sala, professor at the University of Mendrisio, University of Italian Switzerland, Lugano, in the article

² *Mutulae* (łac. *mutulus*) – prostokątna płytką mocowana do spodniej powierzchni gzymsu.

³ *Guttae* (łac. – łezki, krople) – rodzaj ornamentu umieszczany pod mutulusem lub na spodniej części gzymsu.

⁴ Oryg.: *The IFS analysis of a Doric temple clearly shows a self-affine cascade of ornament that is four levels deep* [3, s. 288].

² *Mutulae* (Latin *mutulus*) – rectangular projecting shelf under the corona of a cornice.

³ *Guttae* (Latin – drops) – a kind of ornament placed under the mutulus or on the underside of the cornice.

⁴ Orig.: *The IFS analysis of a Doric temple clearly shows a self-affine cascade of ornament that is four levels deep* [3, p. 288].

II. 1. Fasada zachodnia Partenonu jako fraktal generowany metodą IFS (rys. autora wykonany na podstawie rysunków Carla Bovilla [3])

Fig. 1. West facade of the Parthenon as a fractal generated by IFS (drawing by the author on the basis of Carl Bovill's drawings [3])



II. 2. Elewacje frontowe pałacu Ca' d'Oro w Wenecji (źródło: http://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Ca%27_d%27Oro_facciata.jpg; autor: Didier Descouens [praca własna] [CC BY-SA 4.0])

i kościoła Świętego Krzyża we Florencji (źródło: http://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Santa_croce_facciata.JPG; autor: Sailko [CC BY 3.0])

Fig. 2. Front facades of Ca' d'Oro palace in Venice (source: http://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Ca%27_d%27Oro_facciata.jpg; author: Didier Descouens [own work] [CC BY-SA 4.0])

and the Basilica of the Holy Cross in Florence (source: http://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Santa_croce_facciata.JPG; autor: Sailko [CC BY 3.0])

fasady w miejscu główicy pojawia się przeskalowany trójkąt jako zwężony obraz tympanonu.

Nicoletta Sala, profesor Uniwersytetu w Mendrisio, University of Italian Switzerland, Lugano, w artykule *Fractal components in the Gothic and in the Baroque Architecture (Fraktalne elementy w architekturze gotyckiej i barokowej)* [4] doszukuje się cech samopodobieństwa w fasadach gotyckich katedr. Jako przykład podaje katedrę w Reims, wskazując elementy ostrołukowe portali i zwieńczeń otworów okiennych w wyższych partiach elewacji. Różne gabaryty elementów według Sali są wynikiem przekształceń portalu głównego w systemie IFS. Również we wnętrzu katedry gotyckiej występujące elementy ostrołukowe mają świadczyć o fraktalnym charakterze budowli.

Innym przykładem występowania fraktalnych cech w architekturze gotyku według Nicoletty Sali może być fasada Ca' d'Oro⁵ – pałacu w Wenecji, położonego nad Canal Grande w dzielnicy Canareggio (il. 2). Fasada tej budowli charakteryzuje się asymetryczną kompozycją.

Fractal components in the Gothic and in the Baroque Architecture [4] sees self-similarity features in the facades of Gothic cathedrals. As an example he uses the cathedral in Reims, indicating the elements with pointed arches of the portals and window openings in the upper sections of the facade. Different dimensions of the elements result, in his opinion, from the transformations of the main portal in the IFS system. The Gothic cathedral also has some elements with pointed arches inside which are supposed to testify to the fractal nature of the building.

According to Nicoletta Sala the facade of Ca' d'Oro⁵ – the palace in Venice, located by the Grand Canal in the district of Canareggio – can be another example of fractal features in Gothic architecture (Fig. 2). It has a characteristic asymmetric composition. Its left part has a portico with two rows of storeys with elements of a loggia above it, and a blind arcade below the cornice. Most of its right part is a plain wall. The portico, the loggias, and the elements of a frieze have arches of different sizes but their shapes are similar (Fig. 2). Accepting this fact as a self-

⁵ Ca' d'Oro – Złoty Dom, nazwa pochodzi od faktu iż pierwotnie znaczne części elewacji pokryte były złotem.

⁵ Ca' d'Oro – Golden House; its name derives from the fact that originally large sections of its facade were gilded.

W lewej części występuje portyk, nad którym usytuowane są dwie kondygnacje z elementami loggii, a poniżej gzymsu fryz arkadkowy. W prawej części przeważa lita ściana. Portyk, loggie oraz elementy fryzu zwieńczone są łukami o różnych gabarytach, ale podobnych kształtach (il. 2). Uznając ten fakt za cechę samopodobieństwa, Nicoletta Sala sformułowała twierdzenie o fraktalnym charakterze fasady pałacu Ca' d'Oro.

Wątpliwości może budzić niezgodność kształtów ostrołuku portyku i łukowego okrągłego fryzu arkadkowego. Trudno też stwierdzić zależność liczbową (skalę podobieństwa) między gabarytami elementów o różnych wielkościach.

Jako kolejny przykład elewacji, w której występują elementy samopodobne, Nicoletta Sala prezentuje fronton kościoła Świętego Krzyża we Florencji (Santa Croce) pochodzącego z przełomu XIV i XV w. (il. 2). Według Sali samopodobieństwo występuje między układem trzech frontonów usytuowanych nad wejściowymi portykami a układem trzech tympanonów wieńczących fasadę.

Fasady fraktalne w budowlach współczesnych

Badania nad fraktalnym charakterem fasad we współczesnej architekturze kontynuuje Carl Bovill. W dziele zatytułowanym *Fractal Geometry in Architecture and Design* między innymi zajmuje się pojęciem wymiaru fraktalnego. W obszernym wprowadzeniu omawia zasady pomiaru fraktalnego opartego na wymiarze powszechnie nazywanym wymiarem pudełkowym (*box counting dimension*).

Zasada pomiaru pudełkowego polega na pokryciu danego obiektu płaskiego siatką kwadratów⁶, a następnie zliczeniu, w ilu kwadratach pojawia się fragment obiektu. Liczba N kwadratów zależy od parametru długości boku kwadratu a . Zmniejszanie parametru długości boku powoduje zwiększenie liczby kwadratów, a jednocześnie zwiększenie dokładności pomiaru. Wynik pomiaru pudełkowego d jest ilorazem logarytmu liczby kwadratów potrzebnych do pokrycia obiektu i logarytmu odwrotności parametru długości boku kwadratu⁷ [1, s. 195]:

$$d = \frac{\log N}{\log 1/a}$$

Iloraz różnic wartości uzyskanych w dwóch kolejnych pomiarach stanowi wymiar fraktalny D [1, s. 203], [5, s. 119–121]:

$$D = \frac{\log N_1 - \log N_2}{\log 1/a_1 - \log 1/a_2}$$

Topologiczny wymiar obiektów płaskich wynosi 2, a obiektów przestrzennych 3. Wymiar fraktalny kwadratu wynosi również 2, a sześcianu analogicznie 3, ale w przypadku fraktali, których struktura

similarly feature, Nicoletta Sala formulated the claim that the facade of Ca' d'Oro palace is fractal in its nature.

Some doubts can arise from the inconsistency of the shapes of pointed arches in the portico and round arches of the blind arcade. It is also difficult to establish the numerical relationship (similarity scale) between the dimensions of the elements of various sizes.

As another example of a facade with self-similar elements, Nicoletta Sala presents the front of the Holy Cross in Florence (Santa Croce) from the turn of the 14th and 15th centuries (Fig. 2). According to Sala self-similarity is present between the layout of three fronts located above entrance porticos and the layout of three tympanums crowning the facade.

Fractal facades in contemporary structures

Research on the fractal nature of facades in contemporary architecture is continued by Carl Bovill. In his work titled *Fractal Geometry in Architecture and Design* he deals among other things with the notion of fractal dimension. In a long introduction he describes the principles of fractal counting based on the dimension which is universally known as box counting dimension.

The box counting principle consists in covering a given flat object with a network of squares⁶ and then counting in how many squares a fragment of an object appears. The number of squares N depends on the side length parameter of the square a . Decreasing the side length parameter results in increasing the number of squares and at the same time increasing the counting precision. The result of box counting d is the quotient of the logarithm of the box counting needed to cover an object and the logarithm of the opposite of square side length parameter⁷ [1, p. 195]:

$$d = \frac{\log N}{\log 1/a}$$

The quotient of the differences of the values which result from two successive countings is the fractal dimension D [1, p. 203], [5, pp. 119–121]:

$$D = \frac{\log N_1 - \log N_2}{\log 1/a_1 - \log 1/a_2}$$

The topological dimension of flat objects is 2, and of spatial objects 3. The fractal dimension of the square is also 2, and of a cube by analogy 3, but in the case of fractals whose structure is complex and self-similar, the fractal dimension is a fractional number.

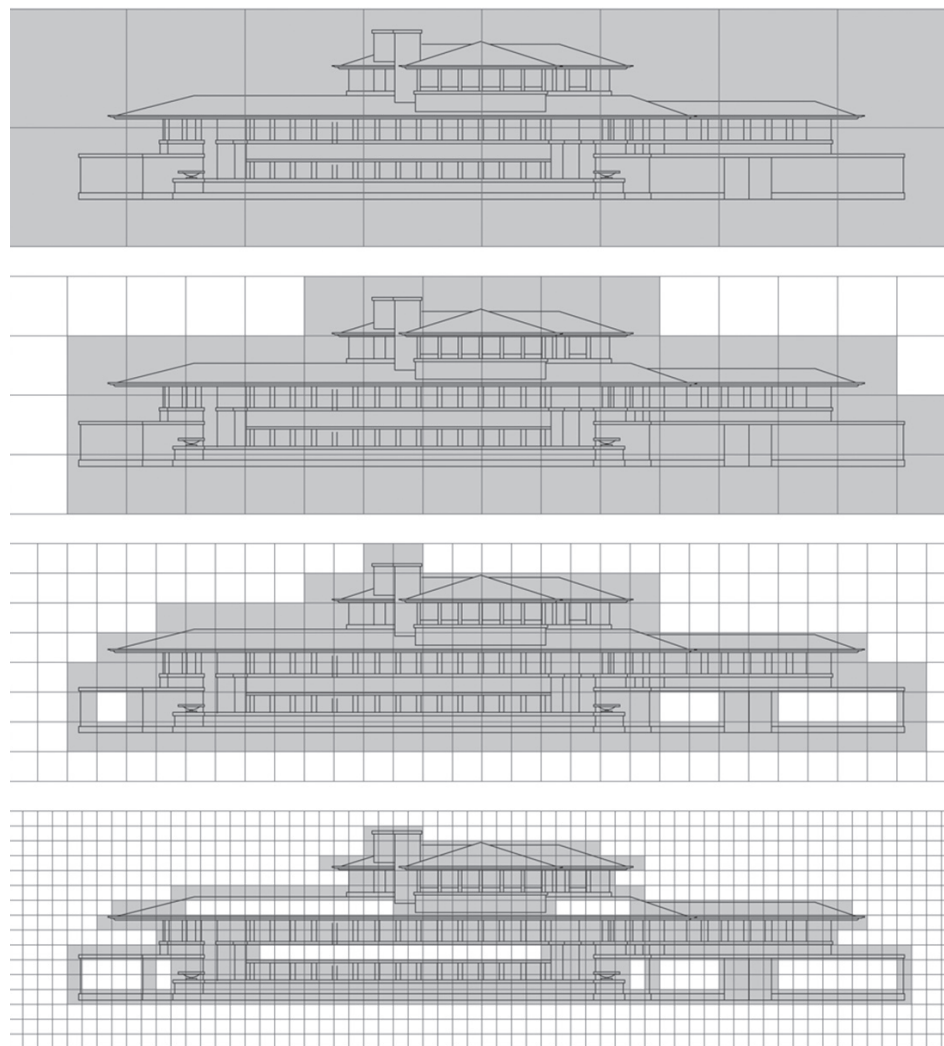
Carl Bovill studied the facades of buildings designed by Frank Lloyd Wright: Robie House and Unity Temple. In the case of Robie House the facade was covered successively with four networks, and the results of fractal counting fell between $d = 1.645$ and $d = 1.441$ (Fig. 3). In

⁶ W przypadku obiektu przestrzennego siatką sześcianów – stąd nazwa *box counting dimension*.

⁷ Dokładniej: $1/a$ jest współczynnikiem skali podobieństwa wielkości boku kwadratu na danym etapie pomiaru w stosunku do pomiaru pierwszego – wielkości kwadratu, w którym mieści się cały obiekt.

⁶ In the case of a spatial object with a network of cubes – thus the name *box counting dimension*.

⁷ To be more precise: $1/a$ is the size similarity scale rate of the square side in a given stage of counting in relationship to the first counting – square size where the whole object fits.



Il. 3. Pomiar fraktalny elewacji południowej Robie House (rys. autora wykonany na podstawie rysunków Carla Bovilla [5, s. 120, 122])

Fig. 3. Fractal measurement of south facade of the Robie House (drawing by the author on the basis of Carl Bovill's drawings [5, p. 120, 122])

jest złożona i samopodobna, wymiar fraktalny jest liczbą ułamkową.

Carl Bovill poddał badaniom elewacje budynków zaprojektowanych przez Franka Lloyd Wrighta: Robie House i Unity Temple. W przypadku Robie House elewacja została pokryta kolejno czterema siatkami, a wyniki pomiaru fraktalnego wahały się pomiędzy $d=1,645$ a $d=1,441$ (il. 3). W przypadku Unity Temple wymiar wynosił od $d=1,482$ do $d=1,621$.

Carl Bovill odżegnuje się jednak od jednoznacznych stwierdzeń, zaznaczając, że budynki nie są fraktalami w taki sam sposób jak konstrukcje matematyczne, takie jak krzywa van Kocha⁸. Porównuje proces pomiaru fraktalnego, w którym dokonuje się kolejnych przybliżeń z większą dokładnością, do percepcji wizualnej obiektu architektonicznego: w miarę zbliżania się do budowli zauważa się coraz więcej szczegółów na elewacji aż do wejścia do wnętrza, w którym można zauważyć detale okien czy drzwi. Na poparcie wywodu Bovill dokonuje pomiaru fraktalnego detalu okna, w którym doszukuje się

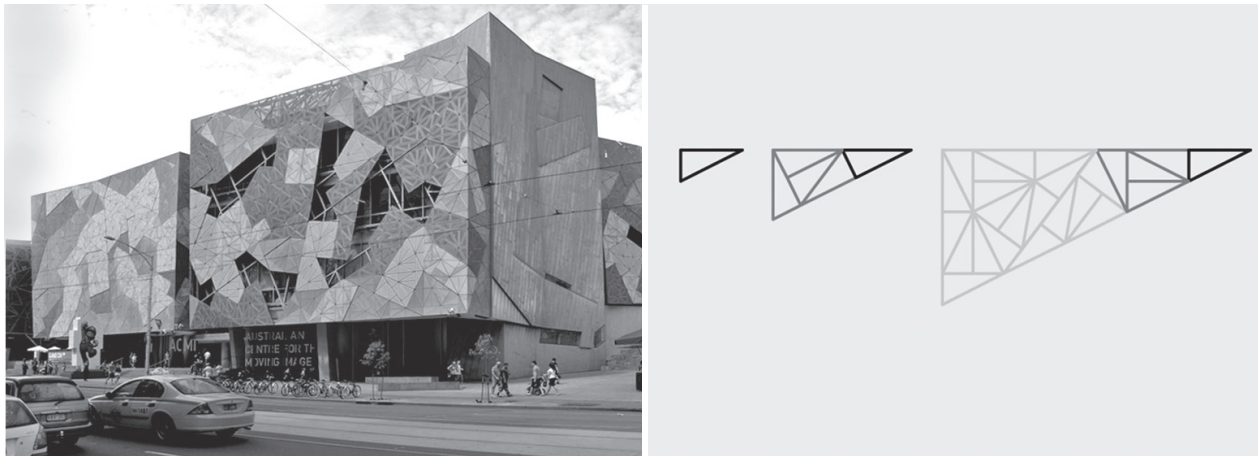
the case of Unity Temple the dimension was between $d=1.482$ and $d=1.621$.

Although Carl Bovill avoids definitive claims, noting that the buildings are not fractals in the same way as mathematical structures such as the Koch curve⁸. He compares the process of fractal counting, with successive, more and more accurate approximations, to the visual perception of an architectural object: the closer you get to a structure, the more and more details you notice on the facade until you go inside, where you can see details of windows and doors. In order to prove his point Bovill executes the fractal counting of the window detail, where he claims to see some motifs of the Sierpinski triangle – one of the most famous fractals. The fractal dimension in this case was between $d=1.721$ and $d=1.626$ [5, pp. 119–126].

In spite of the ambiguity of the claim regarding the fractal nature of the architecture by Frank Lloyd Wright, many researchers of fractal components in architecture followed Bovill, applying the dimensional criterion as

⁸ Oryg.: *Buildings are not fractals in the same way that mathematical constructs such as the Koch curve are fractals* [5, s. 117].

⁸ Oryg.: *Buildings are not fractals in the same way that mathematical constructs such as the Koch curve are fractals* [5, p. 117].



Il. 4. Budynek Federation Square i schemat teselacji Conway/Radina (autor: Bidgee [praca własna], http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Australian_Centre_for_the_Moving_Image.jpg?uselang=pl, [CC BY 3.0], schemat teselacji – rysunek własny autora)

Fig. 4. Federation Square building and Conway/Radin tessellation (author: Bidgee [own work], http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Australian_Centre_for_the_Moving_Image.jpg?uselang=pl, [CC BY 3.0], schema tessellation – drawing by the author)

motywów trójkąta Sierpińskiego – jednego z najbardziej znanych fraktali. Wymiar fraktalny w tym wypadku wahał się od $d = 1,721$ do $d = 1,626$ [5, s. 119–126].

Pomimo niejednoznaczności wypowiedzi odnośnie do fraktalnego charakteru architektury Franka Lloyd Wrighta w ślad za Bovillem podążyło wielu badaczy komponentów fraktalnych w architekturze, stosujących kryterium wymiaru jako cechy pozwalającej na zaliczenie danego obiektu do budynków fraktalnych⁹.

Niezależnie od słuszności tez stawianych przez wspomnianych naukowców wątpliwości budzi fakt analizowania płaskiego rysunku, który jest zaledwie ortogonalną projekcją przestrzeni trzywymiarowej, a także przyjęcia jako jedynego kryterium wymiaru fraktalnego z pominięciem innych cech charakterystycznych obiektów fraktalnych.

Kolejnym badaczem fasad fraktalnych jest Charles Jencks, amerykański architekt i historyk architektury, autor dzieła zatytułowanego *The New Paradigm in Architecture* z podtytułem *The Language of Post-Modern Architecture (Nowy paradygmat architektury – Język architektury postmodernistycznej)* [6]. W rozdziale *The New Paradigm II – Fractal Architecture (Nowy paradygmat II – Architektura fraktalna)* ogłasza narodziny nowego kierunku architektury, przytaczając przykłady budowli na poparcie swojej tezy.

Jednym z przykładów jest Federation Square – obiekt zaprojektowany przez Petera Dawsona i Donalda L. Batesa z biura projektowego LAB Architecture Studio. Elewacje budynku Federation Square zaprojektowano z wykorzystaniem piaskowca, blachy cynkowej i szkła (il. 4).

Podziały elewacji oparte są na parkietażu nieokresowym Johna Conwaya i Charlesa Radina. Podstawą konstrukcji tej teselacji jest przekształcanie trójkąta prostokątnego układem transformacji afinicznych w określonym porządku.

a feature on the basis of which a given object can be included in the category of fractal buildings⁹.

Regardless of whether the theses put forward by the above-mentioned scientists are correct or not, some doubts arise from the fact of analyzing a flat drawing which is just an orthogonal projection of a three-dimensional space as well as assuming the fractal dimension as the only criterion, disregarding other features characteristic of fractal objects.

The American architect and historian of architecture, Charles Jencks, the author of *The New Paradigm in Architecture* subtitled *The Language of Post-Modern Architecture* [6] is another researcher of fractal facades. In the chapter titled *The New Paradigm II – Fractal Architecture* he proclaims the birth of a new direction in architecture, giving examples of structures to support his claim.

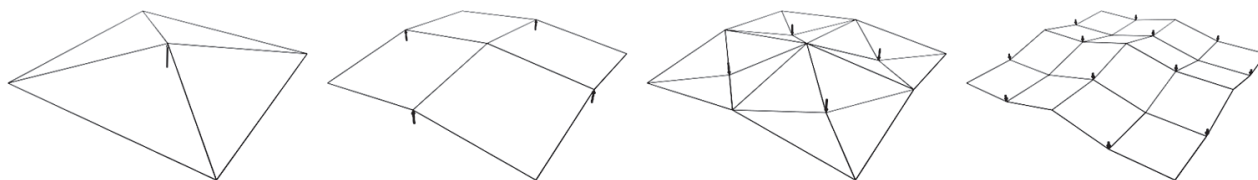
One of the examples is Federation Square – designed by Peter Dawson and Donald L. Bates from LAB Architecture Studio. The facades of the Federation Square building were designed with the use of sandstone, zinc sheet, and glass (Fig. 4).

The divisions of the facade are based on non-periodic tilings defined by John Conway and Charles Radin. The structure of that tessellation is based on transforming a right-angled triangle with affine transformations in a set sequence.

The transformations of a triangle (translation, symmetry, rotation) result in a panel composed of five copies of the triangle. The panel and the triangle remain self-similar (the triangle is a reduced copy of the panel). The transformation of the panel with a set of the same transformations gives a megapanel which remains self-similar to both the panel and the triangle (Fig. 4) [7, pp. 44–48]. This way the facade of Federation Square, which demonstrates self-

⁹ Jala Makhzoumi, Gloria Pungetti, Gerardo Burkle-Elizondo, Nicoletta Sala, Ricardo David Valdez-Cepeda.

⁹ Jala Makhzoumi, Gloria Pungetti, Gerardo Burkle-Elizondo, Nicoletta Sala, Ricardo David Valdez-Cepeda.



Il. 5. Kolejne kroki konstrukcji powierzchni fraktalnej generowanej metodą diamentowego kwadratu z predefiniowanym doбором parametrów przesunięcia punktu środkowego (źródło: rysunek własny autora)

Fig. 5. Next steps in the construction of the fractal surface generated with the diamond square method with predefined selection of parameters of the midpoint displacement (source: drawing by the author)

Przekształcenia trójkąta (przesunięcie, symetria, obrót) prowadzą do powstania panelu składającego się z pięciu kopii trójkąta. Panel i trójkąt pozostają w relacji samopodobieństwa (trójkąt jest pomniejszoną kopią panelu). Przekształcanie panelu układem tych samych przekształceń prowadzi do powstania megapanelu, który pozostaje w relacji samopodobieństwa zarówno w stosunku do panelu, jak i trójkąta (il. 4) [7, s. 44–48]. W ten sposób elewacja Federation Square charakteryzuje się cechą samopodobieństwa pozwalającą zaliczyć ją do fasady o charakterze fraktalnym.

Analiza przedstawionych przykładów pozwala na wyciągnięcie wniosków, iż we wszystkich przypadkach fasady są traktowane przez badaczy tematu jako płaskie rysunki elewacyjne, podczas gdy prawie zawsze fasada jest w sensie geometrycznym obiektem trójwymiarowym, reliefem.

Odmianą propozycją potraktowania fasady jako reliefu o cechach fraktalnych może być wykorzystanie powierzchni fraktalnej – jednego z typów obiektów fraktalnych – jako elementu kształtującego formę elewacji.

Powierzchnie fraktalne

Wyróżnia się dwie podstawowe metody generowania powierzchni fraktalnych zależne od sposobu teselacji płaszczyzny:

- diamentowego kwadratu¹⁰ opartą na teselacji kwadratowej,
- triangulacyjną opartą na teselacji trójkątnej.

Obie metody działają w oparciu o ten sam algorytm nazywany metodą losowego przemieszczenia punktu środkowego (ang. *random midpoint displacement method*) stosowaną między innymi w symulacji ruchów Browna [1, s. 453]. Na potrzeby niniejszej pracy wyeliminowano element losowości w doborze parametru przemieszczenia punktu środkowego, zatem metodę diamentowego kwadratu z predefiniowanym doбором parametrów translacji można wyjaśnić w sposób następujący:

Obiektem początkowym jest kwadrat o boku a . W pierwszym kroku konstrukcji punkt środkowy kwadratu zostaje przemieszczony na kierunku k prostopadłym do płaszczyzny kwadratu o parametrze $D_{1,1} = a/8$. Zwrot wektora translacji dodatni. W kroku drugim prze-

similarity features, can be considered to be a fractal facade.

The analysis of the examples presented above leads to the conclusion that all of these facades are considered by the researchers to be flat facade drawings, whereas, geometrically speaking, the facade is almost always a three-dimensional object – a relief.

The use of a fractal surface – one type of fractal objects – as an element shaping the facade form can be considered to be a different approach to the facade – a relief with fractal features.

Fractal surfaces

There are two basic methods of generating fractal surfaces, depending on surface tessellation:

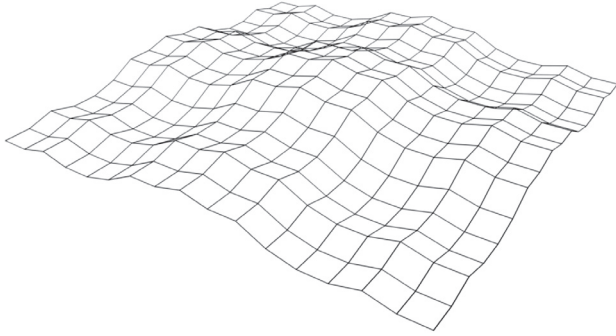
- diamond square based on square tessellation,
- triangulation based on triangular tessellation.

Both methods operate on the basis of the same algorithm called the random midpoint displacement method used for instance in simulation the Brownian motion [1, p. 453]. For the purposes of this paper the element of randomness in the selection of the midpoint displacement parameter has been excluded, and so the diamond square method with predefined selection of translation parameters can be explained in the following way:

The initial object is a square with its side a . In the first step of the construction the midpoint of the square is displaced in the direction k perpendicular to the plane of the square by parameter $D_{1,1} = a/8$. The sense of translation vector positive. In the second step the midpoints of the sides of the square are displaced by parameter $D_{1,2} = D_{1,1}/2 = a/16$. The sense of translation vector positive. The displacement of the above-mentioned points gives an object which is a set of four adjacent rhombuses with sides $b = a\sqrt{5}/4$.

In the second step the procedure is repeated for the rhombuses created in the first step. The midpoints of the rhombuses are displaced in the direction k set in the first step by parameter $D_{2,1} = D_{1,1} - D_{1,1}/8$. The sense of translation vector negative. The midpoints of the sides of the rhombuses are displaced in the direction k by parameter $D_{2,2} = D_{2,1}/2$. The sense of translation vector negative. In the next steps the procedure is repeated for next rhombuses, the midpoint displacement parameters are reduced in compliance with the decreasing constant amplitude $A = D_{1,1} = a/8$, displacement direction k constant, the senses of translation vector alternate for the successive construc-

¹⁰ Ang. *diamond square method* – brak ustalonego, formalnego odpowiednika w języku polskim.



Il. 6. Czwarty krok konstrukcji powierzchni fraktalnej generowanej metodą diamentowego kwadratu (źródło: rysunek własny autora)

Fig. 6. Step four in the construction of the fractal surface generated with the diamond square method (source: drawing by the author)

mieszczeniu zostają poddane punkty środkowe boków kwadratu o parametr $D_{1,2} = D_{1,1}/2 = a/16$. Zwrot wektora translacji dodatni. W wyniku przemieszczenia wyżej wymienionych punktów powstaje obiekt będący układem czterech przystających rombów o bokach $b = a\sqrt{5}/4$.

W kroku drugim procedura zostaje powtórzona dla uzyskanych w kroku pierwszym rombów. Środkowe rombów zostają przemieszczone na ustalonym w kroku pierwszym kierunku k o parametr $D_{2,1} = D_{1,1} - D_{1,1}/8$. Zwrot wektora translacji ujemny. Środkowe boków rombów zostają przemieszczone na kierunku k o parametr $D_{2,2} = D_{2,1}/2$. Zwrot wektora translacji ujemny. W następnych krokach procedura jest powtarzana dla kolejnych rombów, parametry przemieszczenia punktu środkowego redukowane są zgodnie ze zmniejszającą się stałą amplitudą wynoszącą $A = D_{1,1} = a/8$, kierunek k przemieszczenia stały, zwroty wektora translacji przemienne dla kolejnych występujących po sobie kroków konstrukcji. Parametry przemieszczenia środkowych boków zredukowane są w stosunku do parametrów przemieszczenia punktów środkowych o współczynnik redukcji $r = 1/2$. Kierunek i zwrot jak dla punktów środkowych (il. 5).

Powtórzenie procedury prowadzi do wykształcenia powierzchni wielościennej, która dąży do powierzchni gładkiej. Pod względem cech fraktalnych można stwierdzić, że zgodnie z etymologią pojęcia *fractal* uzyskany obiekt w pierwszych krokach konstrukcji charakteryzuje się pofałdowaną, można powiedzieć „połamana” – fraktalną strukturą (il. 6). Predefiniowany dobór parametrów przemieszczenia punktu środkowego i rekurencyjne stosowanie algorytmu zapewnia cechę samopodobieństwa – najbardziej charakterystyczną cechę obiektów fraktalnych.

Podsumowanie: powierzchnia fraktalna jako element fasady budynku

Uzyskana powierzchnia może być alternatywnym sposobem kształtowania fasad o charakterze fraktalnym. Na ilustracji 7 przedstawiono teoretyczny przykład wykorzystania powierzchni fraktalnej (czwarty krok konstrukcji) jako elementu przeszklenia fasady budynku w zabudowie uzupełniającej na terenie obszaru zurbanizowanego. Wykorzystanie powierzchni o predefiniowanych para-



Il. 7. Teoretyczny przykład wykorzystania powierzchni fraktalnej jako elementu fasady budynku (źródło: rysunek własny autora)

Fig. 7. Theoretical example of the application of the fractal surface as an element of a building facade (source: drawing by the author)

tion steps. The side midpoint displacement parameters are reduced in relationship to the midpoint displacement parameters by reduction rate $r = 1/2$. The direction and the sense the same as for midpoints (Fig. 5).

The repetition of the procedure finally creates a polyhedral surface which tends to a smooth surface. As regards the fractal features it can be claimed that in compliance with the etymology of the word *fractal* the object created in the first steps of the construction has an undulating or simply “fractured” structure (Fig. 6). The predefined selection of the midpoint displacement parameters and the recurrent application of the algorithm provides for self-similarity – the most characteristic feature of fractal objects.

Summary: fractal surface as an element of a building facade

The created surface can be an alternative method of development of fractal facades. The Figure 7 presents a theoretical example of the use of fractal surface (step four of the construction) as an element of the facade building glazing for auxiliary buildings in an urban area. The use of the surface with predefined midpoint displacement parameters provides for self-similarity of the structure, resulting from the recurrent generation method.

metrach przemieszczenia punktu środkowego zapewnia samopodobieństwo struktury wynikające z rekurencyjnej metody generowania. Cecha ta specyficzna dla klasycznych obiektów fraktalnych nadaje wprawdzie elewacji statyczny czy wręcz schematyczny charakter, jednocześnie jednak pozwala na unifikację technologiczną węzłów i elementów siatki konstrukcyjnej.

Although this feature, which is unique to classic fractal objects, renders static or even schematic elevation, at the same time it unifies technologically the nodes and elements of the construction network.

Translated by
Tadeusz Szalamacha

Bibliografia/References

- [1] Peitgen H., Jurgens H., Saupe D., *Fractals and Chaos, New Frontiers of science*, 2nd ed., Springer, New York 2004.
- [2] Mandelbrot B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, New York 1977.
- [3] Bovill C., *The Doric Temple as a Fractal*, „Nexus Network Journal” 2008, Vol. 10, No. 2, 283–290.
- [4] Sala N., *Fractal components in the Gothic and in the Baroque Architecture*, [w:] *Proceeding of 8th Generative Art Conference*, 12/2005, http://www.generativeart.com/on/cic/papers2005/27.nicoletta_sala2005.htm [accessed: November 2014].
- [5] Bovill C., *Fractal Geometry in Architecture and Design*, Birkhauser, Boston 1996.
- [6] Jencks Ch., *The New Paradigm in Architecture*, The Language of Post Modernism, Yale University Press, New Haven–London 2002.
- [7] Hammer J., *From Fractal Geometry to Fractured Architecture: The Federation Square of Melbourne*, „The Mathematical Intelligencer” 2006, Vol. 28, Iss. 4, 44–48.

Streszczenie

Wśród wielu zagadnień dotyczących związków geometrii fraktalnej z architekturą istotne miejsce zajmują prace dotyczące fasad o cechach fraktalnych. Naukowcy, poszukując adekwatnych przykładów, sięgają zarówno do fasad budowli historycznych, próbując znaleźć w nich elementy samopodobieństwa, jak i poddają badaniom elewacje obiektów współczesnej architektury, mierząc ich wymiar fraktalny. W większości przykładów charakter fraktalny wydaje się przypadkowy i nieświadomy. Artykuł zawiera propozycję wykorzystania powierzchni fraktalnych o ściśle matematycznych algorytmach generowania jako elementu budującego formę fasady traktowanej jako relief.

Słowa kluczowe: fraktal, powierzchnia, fasada

Abstract

Among many issues regarding connections between fractal geometry and architecture a significant role is played by research on facades with fractal features. In their search for adequate examples scientists draw from the facades of historical structures, trying to find self-similar elements, and from studying the facades of contemporary buildings, measuring their fractal dimension. Most examples seem to demonstrate their fractal features randomly and unintentionally. The paper presents a proposal of the use of fractal surface with strictly mathematical algorithms generated as an element developing the form of the facade considered to be a relief.

Key words: fractal, surface, facade



Kamienne trolle, Finnmark
(fot. E. Cisek)

Stone trolls, Finnmark
(photo by E. Cisek)